лУДК 550.831+838

Про роздільну здатність редукцій аномалій сили тяжіння

© Ю.І. Дубовенко, 2009

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна

Надійшла ______ серпня 2009 р.

Представлено членом редколегії В.І. Старостенком

Похибка трансформацій аномалій МГПСТ, як гармонічних функцій, залежить від кривизни еквіпотенціальних поверхонь поля, амплітуди аномалій, міри області трансформації, і сягає, залежно від виду трансформації, недопустимих величин. Інтерпретація гравіаномалій як гармонічних функцій неефективна для регіональних структур.

The transformation error of anomalies of the MGGP as a harmonic functions depends on the field's equipotential surface curvature, anomaly amplitude and the measure of transformation area, reaching according to the kind of transformation unreasonable values. Gravity anomalies treatment as a harmonic functions has poor effectiveness for the deep regional structures.

Гравіметрія, як і ряд інших наук про Землю, підійшли в своєму розвиткові до етапу, на якому отримання нових узагальнених знань про глибинну будову земної кори і мантії неможливе, як відзначають автори [Страхов и др., 2001; Черный, 1992; Интерпретация..., 1992] без постановки глобальних експериментів, що вимагає обґрунтування застосовності наявних методів інтерпретації потенціальних полів до глобальних масштабів. Формалізація моделей середовища та апріорної інформації відбувається на основі апроксимаційного підходу [Страхов и др., 2001]. Особливої значущості набувають проблеми *повного видобутку* корисної інформації за рахунок редукцій, трансформацій і комплексування методів [Гравиразведка..., 1990] та побудови *адекватної* глобальної нормальної моделі Землі, щодо якої здійснюються ці трансформації. Постає питання роздільної здатності методу.

Актуальність повного видобутку корисної інформації з даних гравіметрії засвідчує чимало публікацій [Оганесян, 2004; Балк, 1989; Страхов, 1990; Старостенко 1978; Дубовенко, 2009а] (як і наведена в них бібліографія). В руслі вивчення цієї проблеми формується нове відгалуження в теорії інтерпретації даних гравіметрії – теорія відновлення модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГПСТ) [Черный, 1992]; в її рамках досліджена нова некласична задача відновлення МГПСТ [Дубовенко, 2009а; Дубовенко, 2009б; Дубовенко, 2010].

1°. Актуальність проблеми. В процесі інтерпретації гравіметричних спостережень чільне місце посідає редукція сили тяжіння за допомогою методів аналітичного продовження, серед яких особливо зауважимо задачу відновлення потенціалу в заданій області. Темі редукції сили тяжіння присвячена численна бібліографія [Гравиразведка..., 1990; Старостенко, 1978; Дубовенко, 2009а; Дубовенко, 2009б; Дубовенко, 2010; Черный, 1969; Алексидзе, 1965; Черный, Якимчик, 1999; Страхов, 1964], але досі вона вирішується *наближено* через неточність постановки класичних задач теорії потенціалу. Дійсно, при розв'язанні зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа, як і редукції за методом Стокса-Молоденського, маємо точний диференціальний оператор для потенціалу сили тяжіння, але *наближені* граничні умови: земна поверхня не є еквіпотенціальною, а сила тяжіння не є лінійною комбінацією гармонічної функції та її нормальної похідної. В редукції за допомогою розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа навпаки, маємо наближене диференціальне рівняння, оскільки величина $g_н(x)$ *негармонічна* [Алексидзе, 1965], зате точні граничні умови. Першому методу надають перевагу в геодезії, а другий є традиційним для гравіметрії. Така підміна виявляє недоліки класичної редукції, якими можна нехтувати в малих масштабах, але які стають відчутними уже в регіональних побудовах. Нагадаємо основні вади редукцій:

1. розрахунок нормального поля Землі і поправок за висоту точки спостереження виходять з різних моделей нормальної Землі;
2. слабко враховано розподіл густини в поправці за проміжний шар і топопоправці (за рельєф);
3. аналітичне продовження аномалій сили тяжіння як гармонічних функцій дійсне лише для областей малої міри [Черный, Якимчик, 1999];
4. неврахування різної направленості векторів нормальної $\gamma(x)$ і реальної $g(x)$ сили тяжіння провокує, як покажемо нижче, похибку майже в 200 мГал при максимальному розходженні векто-

рів до 40”, а всередині такої похибки може сховатись реальна аномалія від глибинних джерел.

Ці фактори обмежують сферу застосування наближених по-суті класичних методів редукції областями *малої міри*. Іншими словами, традиційні методи гравіметрії, основані на моделях плоскої Землі і гармонічних аномалій сили тяжіння, заданих на необмежених множинах, не мають належної роздільної здатності для інтерпретації гравіаномалій від глибинних аномалієтвірних джерел, незважаючи на їхнє поширення в геофізичній практиці. Мода на подібні глибинні густинні побудови, як зазначає [Черный, Якимчик, 1999], веде до неоправданої дискредитації методів аналітичного продовження в очах кінцевих користувачів через їх уживання в неналежних геологічних ситуаціях (зачаровані магією сучасної наукової графіки, інтерпретатори інколи забувають, що в основу тлумачення закладені прості моделі середовища з усіма властивими їм припущеннями й обмеженнями). Внаслідок значущості похибок перерахунку аномалій класичними методами для вивчення глибин Землі, очевидно, необхідно задіяти повнішу інформацію про поведінку аномалій сили тяжіння.

Вихід з цього тупика неможливий через просте вдосконалення алгоритмів продовження, а пролягає через указання меж застосовності стандартних методів [Серкеров, 1990], чисельну оцінку похибок. Це дозволить розділити „сфери впливу” класичної теорії потенціалу і „глобальних” методів.

2°. Витоки проблеми. Класичну методику відновлення потенціалу закладено в [Юнг, 1936], де запропоновано вважати прирости МГПСТ в *локальній області* „вертикальною складовою сили тяжіння[1], і для наближеного аналітичного продовження сили тяжіння в малій області переформулював задачу з правою частиною у вигляді наближених значень сили тяжіння в задачу Неймана для рівняння Лапласа, що дозволило задіяти для аналітичного продовження апарат теорії гармонічних функцій. З кінця 1950-х рр. за допомогою аналітичного продовження досі вирішують задачі локалізації аномальних джерел далеко не завжди в локальних областях, про пагубність чого вже згадувалось.

Перелом міг настати з виходом праці [Алексидзе, 1965], в якій вперше зауважено, що аномалії сили тяжіння загалом *не є* гармонічними функціями, якими їх в *першому наближенні* вважав Юнг, але праця пройшла повз увагу геофізиків. Основні труднощі редукування полягають в тому, що для повного опису значень поля сили тяжіння неможливо отримати лінійне диференціальне рівняння, якщо невідома форма й густина збурювальних тіл, тому доводиться відшукувати деякі наближення збурень гравіполя. Редукцію саме в такій постановці досліджував Алексідзе, відшукуючи *гармонічне наближення* реального розподілу сили тяжіння в деякій *обмеженій замкнутій області*, розміри якої узгоджені з точністю вхідних даних. У побудові цієї локальної області вжито властивість гармонічності похибки апроксимації значень сили тяжіння. Звісно, точність апроксимації обернено пропорційна розмірам області, в якій апроксимується сила тяжіння. Подробиці опису гравіаномалій в глобальній області дає [Черный, 1982].

У силу сказаного доцільно переглянути методику відновлення потенціалу в глобальній області за його слідами (чи його похідних) на межі області (задачі Діріхле, Неймана чи Коші [Левенков, 1987]). Дійсно, гармонічний потенціал однозначно відновлюється в глобальній області при *точних* граничних умовах, як розв’язок відповідної граничної задачі для рівняння Лапласа [Сретенский, 1946], але саме *точні* умови недоступні в силу методичних чи економічних міркувань[2]. Лишається лазівка у вигляді розв’язання задачі Пуанкаре (про косу похідну), але для її вирішення не вистачає граничних даних про орієнтацію вектора сили тяжіння щодо земної поверхні.

3°. Розбіжність векторів. Напруженість поля сили тяжіння має вигляд

$$g(x) = \left| -\nabla W(x) \right| = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(x)}{\partial n} = \left(\bar{g}(x), \bar{n}(x) \right), \qquad (1)$$

---

[1] Частинні похідні потенціалу за будь-яким напрямом співпадають з проекціями аномалій за цим напрямом, тобто $\delta g_z = \frac{\partial W}{\partial z}$, де z спрямоване по нормалі v до рівневої поверхні еліпсоїда – генератора аномального поля γ. На площах діаметром в кількадесят км зміною напряму v можна знехтувати і тоді аномалія δg_z буде наближено гармонічною функцією, оскільки, через неперервність других похідних потенціалу W, маємо $\Delta \delta g_z = \Delta \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \Delta W = 0$, що дозволяє відновлювати потенціал, як гармонічну функцію.

[2] Задіяти виміряні значення сили тяжіння як точні граничні умови неможливо через їх негармонічність, негладкість та обтяження різноманітними похибками.

де $\frac{\partial x_i(x)}{\partial n} = \cos(n, x_i)$, $i = \overline{1,3}$ – напрямні косинуси одиничного вектора $\overline{n}(x)$ внутрішньої нормалі до

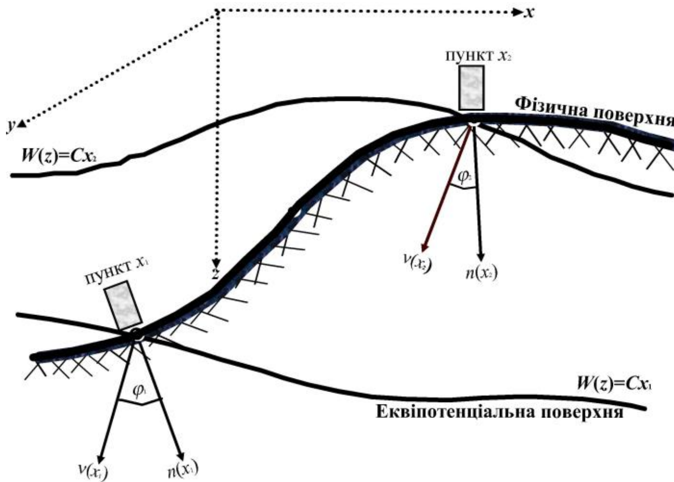


Рис. 1. Приріст кутів між еквіпотенціальними поверхнями та фізичною поверхнею Землі в різних точках профілю.

еквіпотенціальної поверхні $dW(x): W(y) = Cx$ у точці x. Очевидна ортогональність напруженості поля до поверхні $W(z)$, тобто вимірюється насправді *приріст градієнта потенціалу*, а не один з його складників, як це зазвичай уявляють [Веселов, Сагитов, 1968].

Пояснімо це твердження детальніше. Під час вимірювань гравіметр встановлюють в кожній точці x_i профіля ∂y за рівнем на еквіпотенціальній поверхні $W(z) = Cx_i$, яка перетинає ∂y у цій точці (рис. 1). Просторову орієнтацію гравіметра при вимірюванні не фіксують, тому нахили приладу при зміщенні по профілю ∂y лишаються *невідомими*. Різниця цих нахилів зумовлена різною кривизною кожної з непаралельних одна одній еквіпотенціальних поверхонь $W(z) = Cx_i$, $Cx_i \neq Cx_{i+1}$ і описується *приростом кута між нормалями* $v(x_i)$ і $n(x_i)$ до поверхні Землі ∂y і еліпсоїда $W(z)$, що перетинаються в точках x_i і x_{i+1}, або, по-суті, значеннями напрямних косинусів $\cos(n.x_i)$. Величини напрямних косинусів в точках рельєфу за профілем не визначають через надмірну складність таких вимірювань, тому гравіметричні виміри є лише приростами абсолютних значень сили тяжіння (аналітичною апроксимацією яких є значення МГПСТ) між поверхнями $W(z) = Cx_i$. Відтак, під словами „значення сили тяжіння” слід розуміти „значення МГПСТ”.

Для тлумачення цих значень виконують редукцію сили тяжіння, виміряної на різних рівневих поверхнях, до єдиного рівня, зазвичай, рівня геоїда (принагідно зазначмо, що уточнення локального геоїда в межах України, що є окремою проблемою, теж призведе до уточнення виконуваних редукцій). Під редукцією значень МГПСТ будемо розуміти таку задачу: визначити за заданими на поверхні ∂y значеннями $g(x)$, $x \in \partial y$ її значення $g(\xi)$ в деякій точці ξ поза поверхнею ∂y.

Зауваження 1. Якщо функція $g(x)$ задана лише на частині поверхні ∂y (звична справа в геофізичній практиці), незалежно від того, в яку область вона продовжується, задача редукування $g(x)$ є некоректною [Черный, 1992].

В ситуації, коли для аналізу графіка за його графічним зображенням не вистачає роздільної здатності, застосовують його диференціальні властивості. По аналогії, для наближеного опису значень $g(x)$ в глобальній області на додаток до їх „графіка” у вигляді ізоповерхонь рівня задіємо диференціальні властивості цих поверхонь, що характеризуються відношенням (1). Для відновлення з гарантованою точністю поля сили тяжіння за його *гармонічним наближенням* $g(x)$ слід вирішувати відповідну граничну задачу в області *малої міри*. Сучасні методи [Интерпретация..., 1992; Гравиразведка..., 1990; Балк, 1989; Старостенко, 1978; Булах и др., 1976] вирішують такі задачі з точністю до деякої сталої інтегрування, що залежить від форми і розмірів області розв’язку. При відновленні значень сили тяжіння в глобальній області за її значеннями в локальних підобластях отримані розв’язки неможливо „зшити”, як ковдру з клаптів, через відсутність прийнятних крите-

ріїв склеювання локальних гармонічних наближень[3].

В [Алексидзе, 1985] її зведено до розв'язання внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в локальній області; в [Черный, 1992] доведено коректність її постановки на множинах витокоподібно зображених функцій у вигляді потенціалів простого шару, поширених на опуклій поверхні Ляпунова, і, в данину заслугам попередника у дослідженні теми, названо задачу його іменем.

Задача Алексідзе у постановці Чорного [Дубовенко, 2009а] означає: знайти функцію $W(x),\ x\in\partial y$, яка задовольняє в необмеженій замкнутій області $\bar{y}^{+}=y^{+}\cup\partial y$ рівнянню Лапласа $\Delta W(x)=0,\ x\in y^{+}$, якщо в будь-якій точці межі ∂y області і на нескінченно віддаленій точці вона задовольняє умовам: $\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_k}\right)^2=g^2(x),\ x\in\partial y,\ W(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, де $g(x)$ – задана неперервна функція, y^{-} – обмежена область мас Землі, y^{+} – її необмежене доповнення без мас, ∂y – ляпуновська межа y^{-} і y^{+}, така, що $y^{+}=R^{(3}\setminus\bar{y}^{-},\ \bar{y}^{-}=y^{-}\cup\partial y$ (фізична поверхня Землі).

Вважаємо, що густина $\sigma(\xi)$ є інтегровною функцією [Картвелишвили, 1983], хоча вона може бути практично більш гладкою. Питання розв'язності і властивостей задачі висвітлені в [Дубовенко, 2009а; Дубовенко, 2009б; Дубовенко, 2010], а ми визначимо кількісний вимір поняття „область малої міри", в якій справедлива властивість гармонічності функції $g(x)$.

4°. Оцінка міри області. Детальна оцінка міри області означає вияснення зв'язку геометрії області не лише з точністю вимірів і величиною аномалій, а і з геометрією еквіпотенціальних поверхонь і точністю гармонічної апроксимації аномалій. Спробуємо дати її простіше, ніж у [Черный, Якимчик, 1999]. Щоб оцінити по черзі вклад кожної з цих величин, згадаймо опис значень сили тяжіння в глобальній області [Черный, 1982]. Класична аномалія загалом визначається як різниця значень спостереженого і нормального полів [Веселов, Сагитов, 1968]:

$$\delta g(x)=|g(x)|-|\gamma(x)|=2|g(x)|\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{\partial T(x)}{\partial \nu},\tag{3}$$

в якій $\gamma(x)$ – напруженість нормального поля сили тяжіння, що визначається виразом

$$\gamma(x)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \nu}=|\mathrm{grad}\,U(x)|\cos\theta=\left(|\mathrm{grad}\,W(x)|-|\mathrm{grad}\,T(x)|\right)\cos\theta=g(x)\cos\theta-\frac{\partial T(x)}{\partial \nu},$$

де $T(x)=W(x)-U(x)$ – збурювальний потенціал, як різниці реального і нормального потенціалів. Останній визначено у близькій області y_0^{-} *простої геометрії* (близькість областей y_0^{-} і y^{-} означає близькість меж ∂y_0 і ∂y , описану мірою відхилення поверхні стиснутого сфероїда ∂y_0 від земного рельєфу ∂y), з такими ж масами, як в y^{-}, розподіленими *„правильно"* у певнім сенсі [Картвелишвили, 1983]. Істинна аномалія сили тяжіння $\tau(x)=\frac{\partial T(x)}{\partial \nu(x)}=\frac{\partial W(x)}{\partial n(x)}\frac{\partial n(x)}{\partial \nu(x)}-\frac{\partial U(x)}{\partial \nu(x)}$ – нормальна похідна збурювального потенціалу $T(x)$ – виходячи з (3), дорівнює

$$\tau(x)=g(x)-\gamma(x)-2g(x)\sin^2\frac{\vartheta(x)}{2},\tag{4}$$

де $\vartheta(x)$ – кут між нормалями $\mathbf{n}(x)$ і $\mathbf{v}(x)$ у точці x (відхилення виска), $\cos\vartheta(x)=(\mathbf{n}(x),\mathbf{v}(x))$ і $\gamma(x)$ – нормальна сила тяжіння від *відомого розподілу мас* усередині сфероїда ∂y_0. Це визначення аномалій відрізняється від класичного (3), в якому аномалії є *відхиленнями* реального поля сили тяжіння Землі від його *осереднення* – апроксимації поля сфероїда з *невідомим розподілом мас* усередині нього. Відсутність інформації про розподіл нормальних мас ускладнює інтерпретацію

[3] Точність продовжених як гармонічні функції значень сили тяжіння істотно залежить від розмірів області, в якій ставиться гранична задача, тому для отримання результату з заданою точністю нерідко доводиться відповідно зменшувати розміри області. При редукції в глобальну область її розбивають на локальні підобласті, вирішуючи відповідну задачу для кожної з них, виходячи з місцевого „нульового рівня" продовження і місцевої точності розв'язку. Ця точність залежить ще й від точності граничних даних, розмірів і форми локальної підобласті, а різниця рівнів, від яких обчислюють аномалії, може сягати кількасот мГал залежно від величини ундуляцій рельєфу і напруженості поля сили тяжіння. Отже, продовження в глобальну область не дозволяє обчислити в ній аномалії від єдиного рівня.

гравіаномалій.

До речі, значення величини нормального поля можна отримати і по-іншому (немає в [Черный, 1982]), визначаючи косинус кута між нормалями до поверхні Землі і до поверхні рівня в поточній точці у вигляді

$$\cos\theta = \frac{(g,\gamma)}{|g|\cdot|\gamma|} = \sum_{i=1}^{3}\cos(x_i,\nu)\cos(x_i,n) = \frac{\gamma(x)}{g(x)} + \frac{1}{g(x)}\frac{\partial T(x)}{\partial \nu} = \frac{1}{g(x)}\left(\gamma(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial \nu}\right),$$

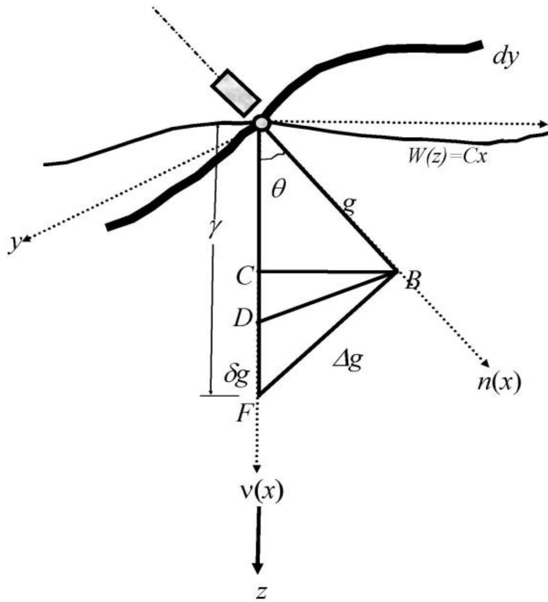


Рис. 2. Геометричне тлумачення аномалій.

звідки $\gamma(x) = g(x)\cos\theta - \frac{\partial T(x)}{\partial \nu}$. Прикметно, що зображення аномалії (3) не є однозначним; його альтернативна подача $\delta g(x) = 2|\gamma(x)|\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{\partial T(x)}{\partial n}$ аналогічна за точністю, але має інший напрям нормалей ν і n. Оскільки вектор $g(x)$ має унікальний нефіксований напрям в кожній точці поверхні ∂y, то обчислення за (3) майже завжди відрізняються від істинного поля. Геометрична інтерпретація істинної аномалії очевидна з рис. 2, де CF – проекція $\Delta g(x)$ на нормаль ν, CD – відхилення класичної аномалії $\delta g(x)$ від проекції CF. Отже, $g = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$, $\gamma = \overrightarrow{OF}$, $\Delta g = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = |\gamma - g|$, $\delta g = \overrightarrow{DF} = |\gamma| - |g|$. Істинна аномалія має ясне аналітичне зображення

$$\Delta g(x) = |g(x) - \gamma(x)| = \sqrt{|g(x)|^2 + |\gamma(x)|^2 - 2|g(x)|\cdot|\gamma(x)|\cos\theta}.$$

Виражаючи величину $g(x)$ через вираз (3) і підставляючи її в останню рівність, отримаємо:

$$\Delta g(x) = 2|\gamma(x)|\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{\delta g(x)}{\gamma(x)}\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{\delta g(x)}{2\gamma(x)}\right)^2}\,. \qquad (5)$$

Навіть якщо класична аномалія дорівнює нулю, істинна відрізняється від неї на величину

$$\Delta g_0(x) = 2|\gamma(x)|\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (6)$$

За відносної зміни нормальної сили тяжіння від полюса до екватора в 3000 мГал і варіації відхилення виска 0"÷40" така різниця (6) виливається у величину до 200 мГал (табл. 1), в якій цілком може „уміститись” аномалія від глибинних неоднорідностей. Це підтверджено тим, що експериментально отримані для деяких районів Землі відхилення виска [Lerch et al., 1979] не можна пояснити лише видимою нерівністю рельєфу, доводиться постулювати їх зв’язок з аномальною будовою кори і мантії.

Табл. 1. Залежність розмірів l локальної області (км) від похибки гармонічної апроксимації ε_0 і амплітуд τ_0 аномалій сили тяжіння (мГал).

Похибка	Амплітуда аномалій τ_0, мГал								
ε_0	10	20	30	40	50	100	150	300	500
0.1	42	22	14						
0.2	84	42	28	22	16				
0.5	212	106	70	54	42	22			
1	424	212	142	106	86	42	28	10	
2				142	170	84	56	28	10
5						212	142	70	42
10						424	284	142	84
20						950	568	284	170

Прикметно, що розміри локальних областей чітко визначені і не надто великі; за межами окреслених ними зон закінчується сфера впливу класичних трансформацій і починається сфера пливу нелінійних наближень, отриманих завдяки розв'язанню задачі Алексідзе. Звичайно, наведені в табл. 1 результати приблизні, оскільки врахована лише так звана операторна похибка ε_0, а вплив на оцінки здійснює і похибка вимірювань ε_1, і похибка округлень ε_2, які мають кумулятивний ефект.

Відзначено [Алексидзе, 1985], що якби аномалія $\delta g(x)$ була високоточною, то перерахунок у зовнішньому просторі був би неможливим через істотну залежність рівняння сили тяжіння від *швидкості зміни* кутів між напрямом аномалії і координатними осями, тобто величини $a(x)$ [Черный, 1970]. Фіксувати швидкість такого обертання неможливо, а нехтування цим відхиленням істотно спотворює перерахунок (на величину (6)). В такій ситуації доречне припущення Юнга, очевидне з рис. 2: класична аномалія з достатньою точністю, що не перевищує величини $CD = OF - OC$ або $\varepsilon_0 = 2|g(x)|\sin^2 \theta/2$ чисельно співпадає з проекцією вектора аномалії на напрям вектора $\gamma(x)$, тобто $\delta g(x) = \dfrac{\partial T(x)}{\partial \nu} + \varepsilon_0$ (табл. 1).

Розглядаючи аномалії $\delta g(x)$ з точністю до ε_0, ми відкидаємо величини порядку $1-\cos(n,\nu)$, де $1-\cos(n,\nu) = 2\sin^2 \dfrac{\theta}{2} = \sum_{k=1}^{3} \cos(n, x_k)[\cos(x_k, n) - \cos(x_k, \nu)] = \sum_{k=1}^{3} \cos(\nu, x_k)[\cos(x_k, \nu) - \cos(x_k, n)]$. Якщо нормальний потенціал обрано вдало, то в замкнутій необмеженій області $\partial\bar{y}^- = R^{(3)} \setminus y^-$ завжди виконується умова $\delta = \max\limits_{x\in\partial\bar{y}^-} |\varepsilon_0(x)| << \max\limits_{x\in\partial\bar{y}^-} \left|\dfrac{\partial T(x)}{\partial \nu}\right|$, тому можна знехтувати вказаною величиною.

На основі наведених даних приходимо до висновку, що з точністю до порядку $0.001 \le \varepsilon_0 \le 0.05$ мГал аномалії сили тяжіння $\delta g(x),\ x \in \partial y$ є значеннями модуля проекції градієнта збурювального потенціалу $T(x)$ на напрям нормалі ν до еквіпотенціальної поверхні нормального поля сили тяжіння, тобто

$$\max_{x\in\partial y} \left| \frac{\partial T(x)}{\partial \nu} - \delta g(x) \right| = \left| \|\operatorname{grad} T(x)\| \cdot |\cos(\nu, x_i)| - \delta g(x) \right| \le \varepsilon_0 . \quad (7)$$

У прийнятій нами системі координат напрям нормалі співпадає з віссю z, тому справедливим буде відношення $\delta g(x) = \dfrac{\partial T(P)}{\partial z} + \varepsilon_0$ у будь-якій точці $P(x)$ деякого околу y_i. Якщо аномалії визначити з точністю ε_1, а складники градієнта по горизонталі $\left|\dfrac{\partial T(x)}{\partial x_i}\right|_{i=1,2} \le \varepsilon_2 > 0$, не перевищують заданої константи, то за умови, що вклади кожного з напрямних косинусів $\cos(x_i,\nu), i = 1,2$ і $1-\cos(x_3,\nu)$ однакові, легко знайти мажоранту для виразу (7):

$$\cos(x_3,\nu) \approx 1,\ |\cos(x_3,\nu) - 1| \le \delta,\ |\cos(x_i,\nu)| \le \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{3\varepsilon_2} = \delta,\ i = 1,2 . \quad (8)$$

У визначеній таким чином області аномалії сили тяжіння $\delta g(x)$ з точністю $\varepsilon_0+\varepsilon_1$ можна вважати гармонічними функціями. З геометричної точки зору обмеження (8) є умовою обертання нормалі $\nu(P)$ навколо осі z, спрямованій по нормалі $\nu(x)$ до еквіпотенціальної поверхні $U(x)=C$ нормального поля в декартовій системі координат з центром в точці x. При русі навколо нормалі $\nu(x)$

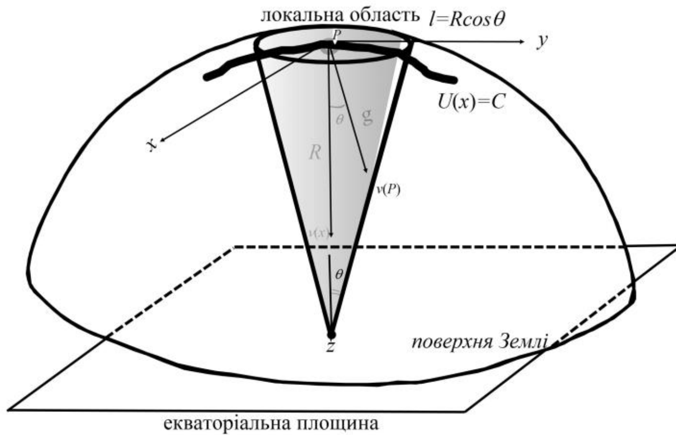


Рис. 3. Геометричне тлумачення форми і розміру локальної області гармонічності гравітаційних аномалій.

нормаль $\nu(P)$ описує в першому наближенні поверхню кругового конуса.

Якщо вершину цього конуса помістити в точку перетину нормалі $\nu(x)$ з еквіпотенціальною площиною еліпсоїда (рис. 3), то локальна область буде обмежена бічною поверхнею конуса, який місить нескінченно віддалену точку по осі z, та земним рельєфом. З рис. 3 очевидно, що радіус вирізаної на поверхні Землі області ∂y_i не перевищує величини $l=R\delta$, де $\delta=\dfrac{\varepsilon_0+\varepsilon_1}{3\varepsilon_2}$, R – радіус Землі в поточній точці P. Згідно правил диференціальної геометрії, конус, зорієнтований як на рис. 3, матиме вершину в центрі середньої кривизни нормальних перетинів еквіпотенціальної поверхні $U(x_0)=C$ в точці 0, тому у виразі $l=R\delta$ радіус R характеризуватиме середній радіус *кривизни* нормальних перетинів поверхні $U(x_0)$.

Виходячи з (7) і (8), приходимо до висновку, що діаметр основи локальної області не перевищує величини $d(x)\le 2l=2R(\varepsilon_0+\varepsilon_1)\Big/3\max\limits_{x\in\partial y}\left|\dfrac{\partial T(x)}{\partial x_3}\right|$, тобто діаметр плоского околу ∂y_i області вимірювань при відомих точності вимірювань ε_1 та апроксимації ε_0 (ці апріорі відомі величини визначаються методикою спостережнь) тим більший, чим менша амплітуда $\max\limits_{x\in\partial y}\left|\dfrac{\partial T(x)}{\partial x_3}\right|$ спостереженої аномалії, а при фіксованій амплітуді росте разом зі зібльшенням похибки вимірювань. Нескладні розрахунки показують, що для того, щоб описати аномалію сили тяжіння амплітудою 30 мГал з точністю 0.1÷0.5 мГал, слід не виходити за межі зони $d=8\div35$ км.

Для точної оцінки розмірів локальної області необхідно *точно* знати аномальні висоти геоїда. Для уточнення фігури Землі за формулою Брунса необхідно з високою точністю визначити збурювальний потенціал $T(x)$; це можна зробити, наприклад, за алгоритмом [Черный, Якимчик, 1999] у вигляді розв'язання послідовності задач Неймана із спеціальними граничними умовами. У першому наближенні можна скористатись прийомом, наведеним в [Дубовенко, 2008а, б].

Зауваження 2. Якщо для перетворення аномалій $\delta g(x)$ використовують конструкції з нескінченними межами по осях x_i, $i=1,2$ (типу інтегралів Пуассона), то розміри локального околу уздовж осі z різко скорочуються до $0.2l$.

5°. Похибка трансформацій. Якщо нормальний сфероїд і розподіл мас у ньому обрані вдало, відхилення виска у районах зі „спокійним" рельєфом не перевищує $60''$, і оцінка зверху останнього доданка у (4) не більша $2g(x)\sin^2\dfrac{\vartheta(x)}{2}<0{,}05$ мГал, $x\in\partial y$. Зв'язок геометрії локальної області з

кривизною еквіпотенціальних поверхонь знайдемо через різницю у околі точки $x \in y^+$ функцій $u(y)$ і $v(y)$ продовження аномалій $\tau(y), y \in \partial y(x)$, розв'язавши відповідні задачі Діріхле для рівнянь аномалій сили тяжіння і Лапласа [Черный, Якимчик, 1999]:

$$\Delta u(y) - a^2(y)u(y) = 0, \quad y \in y(x) \cup y^+, \; u(y) = \tau(y), \quad y \in \partial y(x), \tag{9}$$

$$\Delta v(y) = 0, \quad y \in y(x) \cup y^+, \; v(y) = \tau(y), \; y \in \partial y(x). \tag{10}$$

Задачі (9) і (10) співпадають при $a^2(y) = 0, y \in y(x)$ (вектори одиничних нормалей $\mathbf{n}(x)$ у довільних точках x паралельні, наближення до такої ідеалізації є в областях малої міри – в них напрямок „повного" вектора сили тяжіння постійний, а відносні флуктуації сили тяжіння від середнього її значення невеликі). В іншому разі оцінка точності трансформацій гравіаномалій як гармонічних функцій має вигляд

$$\varepsilon = \max_{y \in \overline{G(x)}} |\varepsilon_1(y)| \le \frac{1}{2\pi} \max_{y \in \partial G(x)} \left| \int_{G(x)} \frac{a^2(\eta)u(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \right|, \tag{11}$$

$$\varepsilon = \max_{y \in \overline{G(x)}} \left\| (\nabla T(y), (\operatorname{grad} v(x)) \cdot \delta \mathrm{x} \right| \le \frac{\tau_0}{a} \sqrt{1 + \frac{a^4}{b^4}} \|\delta \mathbf{x}\|_c, \tag{12}$$

(a, b – велика і мала півосі сфероїда ∂U_x). *Похибки* продовжених аномалій сили тяжіння внаслідок *заміни субгармонічної функції гармонічною функцією* залежить від *кривизни* еквіпотенціальних поверхонь поля, *величини* аномалій і *міри* локальної області, у яку здійснюють продовження.

Похибка трансформації аномалії $\tau(y)$, $y \in \partial y(x)$ за (11) для обчислення параметрів будови шару Землі товщиною 200 км в обмеженій області $\tilde{y}(x)$ (усічений консферичними поверхнями круглий конус із вершиною у центрі Землі, основи якого віддалені від центра на R і R_1, верхня основа співпадає з поверхнею ∂y, і має діаметр 0÷2200 км, $|x| + 200 = R_1$ = 6371,1 км – середній радіус Землі) дорівнює

$$\frac{\varepsilon}{\tau_0} \le 2 \Bigg| 1 - \sqrt{2(1-\cos\varphi)} - r + \sqrt{1 - 2r\cos\varphi + r^2} +$$

$$+ \ln \frac{r(\sqrt{1-\cos\varphi} + \sqrt{r})}{\sqrt{1-\cos\varphi}} \cdot \frac{r + \sqrt{1-2r\cos\varphi + r^2} - 1}{r + \sqrt{1-2r\cos\varphi + r^2} + 1} - \cos\varphi \ln \frac{r + \sqrt{1-2r\cos\varphi + r^2} - \cos\varphi}{1 + \sqrt{2(1-\cos\varphi)} - \cos\varphi} \Bigg|,$$

де $\tau_0 = \left| \max_{y \in \overline{y(x)}} \tau(y) - \min_{y \in \overline{y(x)}} \tau(y) \right|$ – амплітуда аномалії, $r = R_1 / R$.

Для локальної області $\tilde{y}(x)$ ε / τ_0 = $0{,}5 \cdot 10^{-3} \div 0{,}3 \cdot 10^{-1}$ і за відомої амплітуди аномалії легко знайти похибку відхилень субгармонічної функції від гармонічної, але амплітуди аномалій невідомі. Нехай у локальних областях типу $\tilde{y}(x)$ $\tau_0 \ge$10000 мГал, тоді $5 \le \varepsilon \le 290$ мГал.

Похибка продовжених аномалій $\tau(x)$, $x \in \partial y$, як гармонічних функцій в область $y(x) \cap y^+$, за умови, що амплітуди продовжених аномалій $\tau_0 \le$150 мГал, а локальні області $\tilde{y}(x)$ – усічені конуси ($0°30' \le \varphi \le 10°$; $0 \le \beta \le 360°$; $6371{,}1 \le \rho \le 6571{,}1$ км), нижні основи яких співпадають із земним рельєфом, – за (11) складає $0{,}07 \le \varepsilon \le 6{,}3$ мГал. За (12), якщо діаметри нижніх основ сімейства усічених конусів $110 \le \|\delta x\| \le 2200$ км сфероїда ∂y: $a = 6378{,}2$ км, $b = 6356{,}9$ км, то $3{,}7 \le \varepsilon \le 73{,}4$ мГал. Оцінки (11) і (12) різні в області $y(x) \cap y^+$ через те, що в них замість кривизни $a^2(\eta)$ гравіполя в точках $\eta \in \tilde{y}(x)$ (залежної від особливостей регіонального поля і поточної аномалії) вжиті її наближення $a_0^2(\eta)$, $a_1^2(\eta)$ у вигляді концентричних сфер і конфокальних еліпсоїдів.

Область малої міри $\tilde{y}(x)$ перебуває поблизу локальних і на достатній віддалі від регіональних особливостей поля, тому $\max_{\eta \in \overline{y(x)}} a_i^2(\eta) < \max_{\eta \in \overline{y(x)}} a^2(\eta)$, $i = 0{,}1$, тобто, обидві оцінки похибки *занижені*. Похибка (11) $a_0^2(\eta) \le a_1^2(\eta) \le 0{,}5 \cdot 10^{-7}$ істотно менша оцінки (12) $\sqrt{a_0^2(\eta)} < \sqrt{a_1^2(a{,}0{,}0)}$ $= 0{,}22 \cdot 10^{-3}$:

у першій формулі вжито наближення $a_i^2(\eta)$, а у другій – $\sqrt{a_i^2(\eta)}$.

Оцінки похибок трансформації в кожній локальній області $\tilde{y}(x)$ і $y(y)$, навіть перетнутих між собою, не дають змоги оцінити загальну похибку трансформації в об'єднанні $y(x) \cup y(y)$, $x \neq y \in R^{(3)}$. Якщо у точці x відхилення виска $\vartheta(x) = 60''$, а в точці $y - \vartheta(y) = 0$, то „істинна" аномалія $\delta g(x)$ в точці x, у вигляді модуля різниці градієнтів реального й нормального потенціалів, дорівнює

$$\delta g(x) = |\mathbf{g}(x) - \gamma(x)| = \sqrt{4\gamma^2(x)\sin^2\frac{\vartheta(x)}{2} + 4\gamma(x)\tau(x)\sin^2\frac{\vartheta(x)}{2} + \tau^2(x)},$$

а у точці y $\delta g(y) = \tau(y)$. В переході з локальної області $\tilde{y}(x)$ до області $y(y)$ істинна аномалія відрізнятиметься від класичної на $\delta g(x) = 2\gamma(x)\sin\frac{\vartheta(x)}{2} \approx 285$ мГал, навіть якщо класична аномалія $\tau(x) = 0$ в точках x і y. Трансформація поля $\tau(\eta)$ ($\Delta u(\eta) \neq 0$) в кожній з областей $\tilde{y}(x)$ і $y(y)$ при $\tau(x) = \tau(y) = 0$ і $x \neq y$ як гармонічних функцій $v(\eta)$ *не дозволяє* виявити істинну аномалію, яка сягає величин, порівняних зі значеннями трансформованих аномалій навіть у районах зі спокійним рельєфом.

Отже, перетворення поля аномалій сили тяжіння в різних локальних областях за правилами трансформації гармонічних функцій не дає можливості виявити істинну аномалію, яка навіть в районах із незбуреним рельєфом може бути р. ітик ною з редукованою. Саме тому область застосування методів інтерпретації аномалій сили тяжіння, розвинутих на базі теорії гармонічних функцій, обмежується рамками розвідувальної геофізики; їх не можна без додаткових обмежень і удосконалень застосувати для вивчення глибинної регіональної структури Землі. У зв'язку з цим риторичним є питання, враховувати чи ні природу аномалій при глибинному вивченні Землі і не має альтернативи задача Алексідзе [Дубовенко, 2009а]. У світлі сказаного вона є однією з найактуальніших проблем гравіметрії в XXI ст., і повністю вкладається в схему розвитку геофізики (аналітичні апроксимації середовища і поля, нелінійні задачі, дискретні постановки, великорозмірні системи рівнянь) [Страхов и др.., 2001].

Автор висловлює глибоку вдячність академіку НАН України В.І. Старостенку за цінні зауваження.

Список літератури

Страхов В.Н., Шефер У., Страхов А.В., Опитц К. К новой парадигме гравиметрии // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Матер. 28-й сесии Межд. семинара им. Д.Г. Успенского, Киев, 29 янв.-2 февп. 2001 г. – М., ОИФЗ РАН, 2001. – С. 125-128.

Черный А.В. Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук. – К., 1992. – 34 с.

Интерпретация гравитационных и магнитных полей: Сб. науч. трудов / Отв. ред. *Старостенко В.И.* . – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.

Гравиразведка: Справочник геофизика / Под. ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 607 с.

Оганесян С.М. Регулярные методы решения трехмерных задач гравиметрии / С.М. Оганесян; Отв. ред. Старостенко В.И. – Ереван: „Гитутюн" НАН РА, 2004. – 381 с.

Балк П.И. Детерминистские модели интерпретации гравитационных полей: Автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук. – К., 1989. – 34 с.

Страхов В.Н. Об устойчивых методах решения линейных задач геофизики. Постановки и основные конструктивные идеи // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1990, № 8.

Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К.: Наук. думка, 1978. – 228 с.

Дубовенко Ю.І. Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Геофіз. журнал. – 2009а. – **31**, № 6. – С. 132-139.

Дубовенко Ю.І. Редукція задачі Алексідзе для рівняння сили тяжіння // Доп. НАНУ. – 2009б, № 12. – (в друк).

Дубовенко Ю.І. Розв'язність задачі Алексідзе // Доп. НАНУ. – 2010, № 1. – (в друк).

Черный А.В. О редуцировании значений силы тяжести: Автореф. дис... канд. геол.-мин. наук. – К., 1969. – 19 с.

Алексидзе М.А. Редукция силы тяжести. – Тб.: Мецниереба, 1965. – 256 с.

Черный А.В., Якимчик А.И. Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента. Ч. 1 // Геофиз. журнал. – 1999. – **21**, № 3. – С. 55-72.

Страхов В.Н. О корректном применении аналитического продолжения // Геология и геофизика. – 1964, № 8. – С.

*Серкеров С.*А. Теория гравитационного и магнитного потенциалов. – М.: Наука, 1990. – 304 с.
Юнг К. Гравиметрические методы прикладной геофизики // Прикл. геофизика. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – Вып. 1. – С. 53-204.
Черный А.В. Описание гравитационных аномалий // ДАН УССР, сер. Б. – 1982, № 4. – С. 18-21.
Левенков Я.Б. О решении полной задачи Коши для уравнения Лапласа в произвольной двумерной области // Геофиз. журнал. – 1987. – **9**, № 4. – С. 76-81.
Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. – Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1946. – 318 с.
Веселов К.Е., Сагитов М.У. Гравиметрическая разведка. – М.: Недра, 1968. – 256 с.
Булах Е Г. и др. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиметрии. – К.: Наук. думка, 1976. – 218 с.
Алексидзе М.А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. – Тб.: Мецниереба, 1985. – 412 с.
Картвелишвили К.М. Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли. – М.: Наука, 1983. – 94 с.
Lerch F.J. et al. Gravity model improvement using Geos3 (GEM 9 & 10) // Journ. G. Res. – **84**, B8. – 1979. – P. 3897-3916.
Черный А.В. Об уравнении силы тяжести // ДАН УССР, сер. Б. – 1970, № 2. – С. 145-148.
Дубовенко Ю.І. До уточнення аномалій геоїда // Геофіз. журн. – 2008а. – 30, № 4. – С. 112-122.
Дубовенко Ю.І. Деякі особливості уточнення рельєфу геоїда за даними супутникової гравіметрії // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Геологія. – 2008б. – Вип. 44. – С. 30–36.